Roll No. .....

D–3701

B. Sc. (Part III) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

(Optional)

Paper Third (B)

(Discrete Mathematics)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) गणितीय आगमन विधि से दर्शाइये कि $n^4 - 4n^2$, 3 से विभाजित होगा $\forall\, n \geq 2$ ।

Show that $n^4 - 4n^2$ is divisible by 3 for all $n \geq 2$ by mathematical induction method.

(ब) 1 से 500 तक कितने पूर्णांक हैं जो 3 से या 11 से भाज्य हैं किन्तु 3, 5 और 11 सभी से नहीं ?

How many integers from 1 to 500 are divisible by 3 or by 11 but not all 3, 5 and 11 ?

(स) यदि E_1 और E_2 कोई दो घटनाएँ हैं, तब सिद्ध कीजिए कि घटना $(E_1$ या $E_2)$ के घटने की प्रायिकता $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ ।

If E_1 and E_2 are any two events, then prove that the probability of happening an event (E_1 or E_2) is :

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) यदि धन पूर्णांकों का समुच्चय N हो और समुच्चय $N \times N$ में परिभाषित कोई सम्बन्ध R ऐसा हो कि :

$$(a,b)\,R\,(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

जहाँ $a,b,c,d \in N$, तो सिद्ध कीजिए कि R तुल्यता सम्बन्ध है।

If N be the set of positive integers and a relation R be defined in N × N by :

$$(a,b)\,R\,(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

where $a,b,c,d \in N$, then prove that R is an equivalence relation.

(ब) मान लो $(L, \leq)$ एक लैटिस है तब मान लीजिए $\wedge$ तथा $\vee$, L में क्रमशः अवसंधि तथा सम्मिलन संक्रियाओं को निरूपित करते हैं, तब किन्हीं $a,b,c \in L$ के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

जहाँ $\forall\, a,b,c \in L$ ।

Let (L, $\leq$) be a lattice and let $\wedge$ and $\vee$ denote the operations of meet and join in L, then for any $a,b,c \in L$, $\forall\, a,b,c \in L$, prove that :

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)\ \forall\, a,b,c \in L\,.$$

(स) दर्शाइये कि n शीर्षों सहित एक सरल ग्राफ में कोरों की महत्तम संख्या $\frac{n(n-1)}{2}$ होती है।

Show that the maximum number of edges in a simple graph with n vertices is $\frac{n(n-1)}{2}$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) परिमित अवस्था यन्त्र M की न्यूनतमीकृत (Minimize) कीजिए, जहाँ M निम्नांकित अवस्था सारणी से दिया गया है :

अवस्था	निवेश		निर्गम
	0	1	
⇒ S_0	S_1	S_5	0
S_1	S_0	S_5	0
S_2	S_6	S_0	0
S_3	S_7	S_1	0
S_4	S_0	S_6	0
S_5	S_7	S_2	1
S_6	S_0	S_3	1
S_7	S_0	S_2	1

Minimize the finite state machine M whose state table is given below :

State	Input		Output
	0	1	
⇒ S_0	S_1	S_5	0
S_1	S_0	S_5	0
S_2	S_6	S_0	0
S_3	S_7	S_1	0
S_4	S_0	S_6	0
S_5	S_7	S_2	1
S_6	S_0	S_3	1
S_7	S_0	S_2	1

(ब) एक परिमित अवस्था यन्त्र की अभिकल्पना कीजिए जो ठीक एक निर्गम 1 रखता है जब निवेश अनुक्रम अंकों 101 पर समाप्त होता है।

Design a finite state machine having an output of 1 exactly when the input sequence ends with the digits 101.

(स) मान लीजिए a तथा b दो संख्यात्मक फलन हैं जो :

$$a_r = \begin{cases} 0 \quad , & 0 \le r \le 4 \\ 2^{-r} + 3, & r \ge 5 \end{cases}$$

$$b_r = \begin{cases} 1 - 2^r, & 0 \le r \le 2 \\ r + 2, & r \ge 2 \end{cases}$$

से परिभाषित हैं, तब $a + b$ तथा ab ज्ञात कीजिए।

Let a and b be two numeric functions defined by :

$$a_r = \begin{cases} 0 \quad , & 0 \le r \le 4 \\ 2^{-r} + 3, & r \ge 5 \end{cases}$$

$$b_r = \begin{cases} 1 - 2^r, & 0 \le r \le 2 \\ r + 2, & r \ge 2 \end{cases}$$

obtain $a + b$ and ab.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) निम्नलिखित अन्तर समीकरण को हल कीजिए :

$$a_{r+2} + 2\,a_{r+1} + a_r = r + 2^r$$

Solve the following difference equation :

$$a_{r+2} + 2\,a_{r+1} + a_r = r + 2^r$$

(ब) जनक फलन विधि से निम्नलिखित अन्तर समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$a_r - 5\,a_{r-1} + 6\,a_{r-2} = 2$$

दिया गया है :

$$a_0 = 1, a_1 = 2 \text{ ।}$$

Solve the following difference equation by using generating function method :

$$a_r - 5\,a_{r-1} + 6\,a_{r-2} = 2$$

given that :

$$a_0 = 1, a_1 = 2\,.$$

(स) सिद्ध कीजिए कि निम्न चार आव्यूहों :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

का समुच्चय आव्यूह गुणन के अन्तर्गत एक समूह है। क्या यह आबेली है ?

Show that the four matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

form a multiplicative group. Is this abelian ?

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) निम्नलिखित को एक उदाहरण देकर परिभाषित कीजिए :

(i) पूर्ण क्रम एवं पूर्ण लैटिस

(ii) बंटनीय जालक

Define the following with an example :

(i) Complete order and complete lattice

(ii) Distributive lattices

(ब) निम्नलिखित बूलीयन फलनों को वियोजनीय प्रसामान्य रूप में परिवर्तित कीजिए :

$$\mathrm{F}(x, y, z) = \left[(x + y)' + (y + z)' \right]' + y.z$$

Change the following Boolean function to disjunctive normal form :

$$f(x, y, z) = \left[(x + y)' + (y + z)' \right]' + y\,.z$$

(स) निम्नलिखित परिपथ का सरलीकरण कीजिए :

Simplify the following circuit :