Roll No. .....

D–3603

B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2020

(Old Course)

MATHEMATICS

Paper First

(Algebra and Trigonometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Answer any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) हर्मिशियन आव्यूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि हर्मिशियन आव्यूह का प्रत्येक विकर्ण प्रविष्टि शून्य होता है।

Define Hermitian matrix with example and prove that every diagonal entry of Hemitian matrix is real.

(ब) निम्नलिखित आव्यूह की जाति तथा शून्यता ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -8 & -6 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Find the rank and nullity of the matrix given below :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -8 & -6 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(स) दर्शाइये कि आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

कैले-हेमिल्टन प्रमेय को सन्तुष्ट करता है। अतः A^{-1} ज्ञात कीजिए।

Show that the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

satisfies Cayley-Hamilton theorem. Hence find A^{-1}.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

Solve by matrix method :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

(ब) समीकरण

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$$

को हल कीजिए, जबकि दो मूलों का अन्तर 3 है।

Solve the equation

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$$

when the difference of two roots is 3.

(स) कार्डन विधि से त्रिघात को हल कीजिए :

$$x^3 - 18x - 35 = 0.$$

Solve the cubic by Cardon's method :

$$x^3 - 18x - 35 = 0.$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि G एक समूह है तथा H, G का एक अरिक्त उपसमुच्चय है, तो H, G का उपसमूह होगा यदि और केवल यदि $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, जहाँ b^{-1}, b का G में प्रतिलोम अवयव है।

If G is a group and H be a non-empty subset of G, then H is a subgroup of G if and only if $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is the inverse of b in G.

(ब) तुल्यता सम्बन्ध की परिभाषा दीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि सम्बन्ध $a \equiv b \pmod m$ समस्त पूर्णांकों के समुच्चय I में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

Define equivalence relation and prove that the relation $a \equiv b \pmod m$, the set of all integers I is an equivalence relation.

(स) लैग्रांज प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) समूहों पर समाकारिता के मूलभूत प्रमेय को कथन देकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Fundamental theorem on Homomorphism of groups.

(ब) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।

Prove that the intersection of two subrings is a subring.

(स) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

Prove that every finite integral domain is a field.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$$

If $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, prove that :

$$x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$$

(ब) श्रेणी का योग कीजिए :

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + ...\infty$$

Sum the series :

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + ...\infty$$

(स) यदि n कोई धन पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{(n/2)+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$

If n is any positive integer, then prove that :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{(n/2)+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$